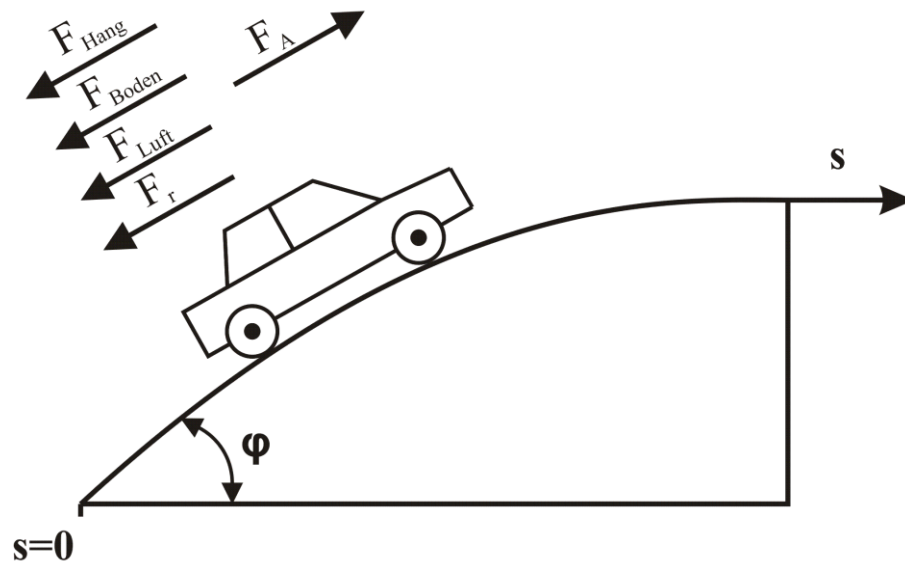


Aufgabe 4 (TR) ++ Bergauffahrt eines Fahrzeuges

a)



Steigungswinkel: $\varphi = \frac{a_\varphi}{s+1}$ mit Konstante a_φ , Fahrstrecke s

Antriebskraft: $F_A = u$ mit Eingang u

Luftwiderstand: $F_{Luft} = d_L \cdot v^2$ mit $\dot{s} = v$, Luftwiderstandskonstante d_L

Bodenreibung: $F_{Boden} = d_B \cdot v$ mit Reibungskonstante d_B

Trägheitskraft: $F_T = m \cdot a$ mit $\ddot{s} = a$

Hangabtrieb: $F_{Hang} = m \cdot g \cdot \sin\left(\frac{a_\varphi}{s+1}\right)$

b)

$$F_A = F_{Luft} + F_{Boden} + F_T + F_{Hang}$$

$$u = d_L \cdot v^2 + d_B \cdot v + m \cdot a + m \cdot g \cdot \sin\left(\frac{a_\varphi}{s+1}\right)$$

$$u = d_L \cdot (\dot{s})^2 + d_B \cdot \dot{s} + m \cdot \ddot{s} + m \cdot g \cdot \sin\left(\frac{a_\varphi}{s+1}\right)$$

$$\ddot{s} = \frac{1}{m} \left(u - d_L \cdot (\dot{s})^2 - d_B \cdot \dot{s} - m \cdot g \cdot \sin\left(\frac{a_\varphi}{s+1}\right) \right)$$

c)

$$u(t) = F_A(t)$$

$$y(t) = s(t)$$

Geeignete Zustände für ein Zustandsraummodell wären:

$$x(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \dot{x}_2(t) = \ddot{s}(t) = a(t)$$

Das System ist durch die Quadrierung von $\dot{s}(t)$ und durch die Sinusfunktion nichtlinear.

Aufgabe 5 (TR) ++ Tankdurchfluss Trichter

a)

$$\dot{V}(t) = q_{zu}(t) - q_{ab}(t) \quad (1)$$

$$q_{ab}(t) = a \cdot v_{ab}(t) \quad \text{mit Fließgeschwindigkeit } v_{ab}(t) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)}$$

$$= a \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)}$$

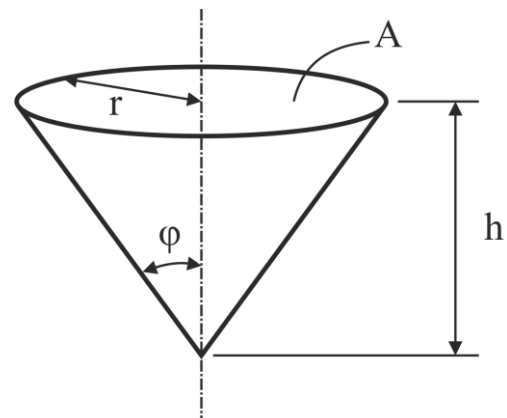
Kegelvolumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$$

$$\downarrow A = r^2 \cdot \pi = (h(t) \cdot \tan \varphi)^2 \cdot \pi$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h^3 \cdot \tan^2 \varphi$$

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V}(t) = \frac{\pi}{3} \cdot 3 \cdot h^2 \cdot \dot{h} \cdot \tan^2 \varphi \quad (2)$$



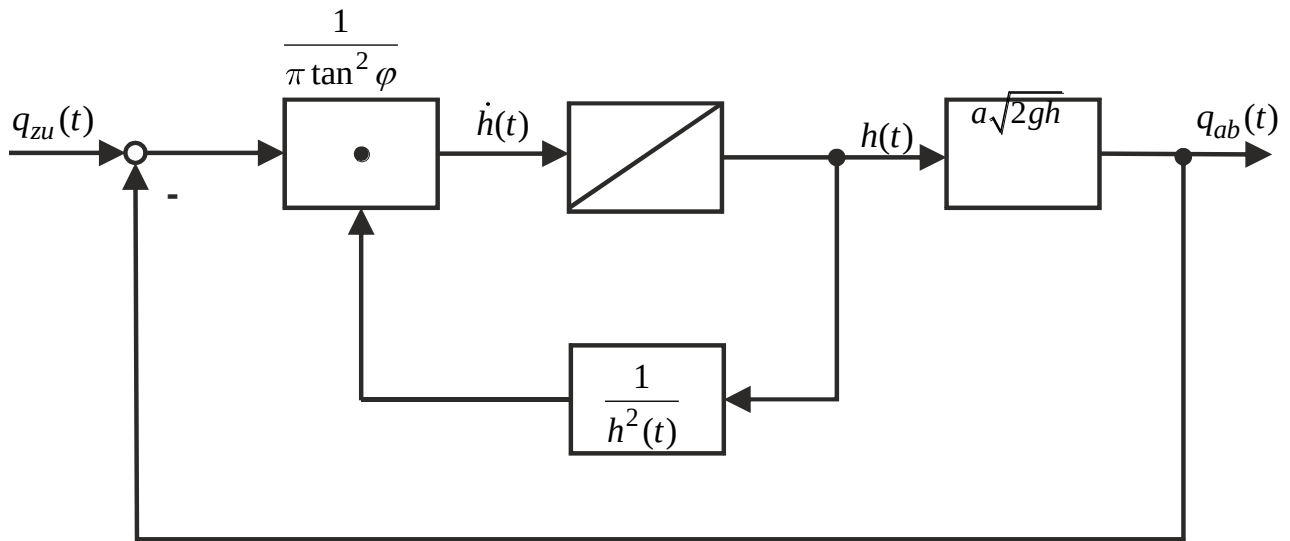
$$(1) \text{ und } (2) \Rightarrow q_{zu}(t) - q_{ab}(t) = \pi \cdot \tan^2 \varphi \cdot h^2(t) \cdot \dot{h}(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{h}(t) = \frac{1}{(\pi \cdot \tan^2 \varphi) \cdot h^2(t)} \cdot (q_{zu}(t) - a \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)})}$$

Element für Behälter: Speicherelement/ Kondensator

Element für laminare Widerstände: Widerstand

b) Strukturbild:



Aufgabe 6 (TR) + Basissysteme

a)

1) RLC-Serienschwingkreis

$$u_{ges}(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$= R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt$$

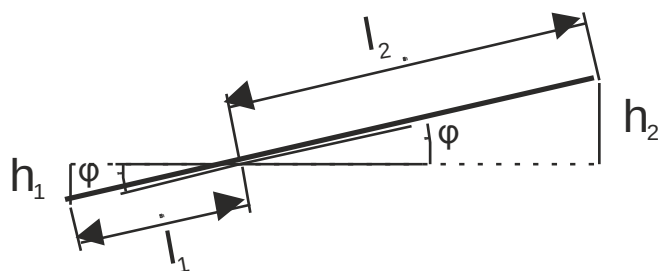
Verallgemeinerter Strom: $f = i$

Verallgemeinerte Spannung: $e = u$

2) Translatorische Wippe (masselos, keine Reibung)

$$h_1(t) = l_1 \cdot \sin(\varphi(t))$$

$$h_2(t) = l_2 \cdot \sin(\varphi(t))$$



3) Idealisierte Feder

$$F(t) = k_T \cdot x_{12}(t)$$

$$x_{12}(t) = \int_0^t v_{12}(\tau) d\tau, \quad \dot{x}_{12}(t) = v_{12}(t)$$

$$\dot{F}(t) = k_T \cdot v_{12}(t)$$

mit Kraft $F(t)$, Federkonstante k_T , Auslenkung $x_{12}(t)$ und Geschwindigkeit $v_{12}(t)$

4) Idealisierter Dämpfer

$$F(t) = d_T \cdot v_{12}(t) = d_T \cdot \dot{x}_{12}(t)$$

mit Dämpfer-/Reibungskonstante d_T

b)

1) Siehe Aufgabenstellung

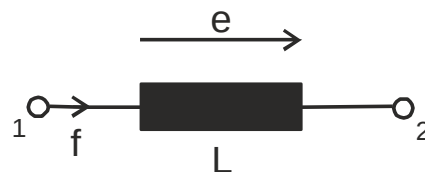
2) Transformator

3) Idealierte Feder

$$e = v_{12} = v_1 - v_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$$

$$f = F$$

$$L = \frac{1}{k_T}$$

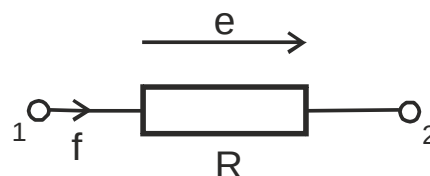


4) Idealisierter Dämpfer

$$e = v_{12}$$

$$f = F$$

$$R = \frac{1}{d_T}$$



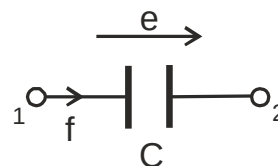
Masse:

$$F(t) = m \cdot \dot{v}(t)$$

$$e = v$$

$$f = F$$

$$C = m$$



Aufgabe 8 (TR) ++ mathematisches Pendel

- a) Trägheitsmoment des Pendels:
(Vereinfachung: masseloser Stab und Punktmasse)

$$J = m \cdot l_1^2$$

m : Masse des Pendels

l_1 : Entfernung von der Drehachse

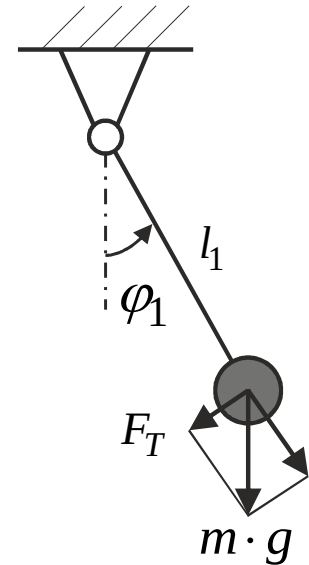
Tangentiale Kraft F_T an der Masse:

$$F_T = m \cdot g \cdot \sin \varphi_1$$

Drehimpulssatz:

$$J \cdot \ddot{\varphi}(t) = \sum M_i(t)$$

Die Summe aller Drehmomente entspricht der Winkelbeschleunigung mal dem Trägheitsmoment des rotierenden Objekts.



$$\begin{aligned} m \cdot l_1^2 \cdot \ddot{\varphi}_1(t) &= -m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi_1(t) \\ \Rightarrow \ddot{\varphi}_1(t) &= -\frac{g}{l} \cdot \sin \varphi_1(t) \end{aligned}$$

- b) Ruhelagen ermitteln:
(keine Arbeitspunkte, weil kein Eingangssignal existiert und nur eine Anfangsauslenkung zu Pendelbewegung führt.)

Alle Zeitableitungen zu Null setzen: $0 = -\frac{g}{l_1} \cdot \sin \varphi_1(t)$

$$\Rightarrow \varphi_{1R1} = 0 \text{ und } \varphi_{1R2} = \pi$$

Welche der beiden ist stabile Ruhelage? π instabil, 0 stabil

Linearisierung:

- Ruhelage $\varphi_1 = 0$:

$$f \varphi_1 = \ddot{\varphi}_1 t + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi_1 t = 0$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{\varphi}_1} \right|_{\varphi_1 = \varphi_{1R1}} \cdot \Delta \ddot{\varphi}_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_1} \right|_{\varphi_1 = \varphi_{1R1}} \cdot \Delta \dot{\varphi}_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \right|_{\varphi_1 = \varphi_{1R1}} \cdot \Delta \varphi_1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \ddot{\varphi}_1 = \left. \frac{d \left(-\frac{g}{l_1} \cdot \sin \varphi_1 \right)}{d \varphi} \right|_{\varphi_1 = \varphi_{1R1}} \cdot \Delta \varphi_1 = \left. -\frac{g}{l_1} \cdot \cos \varphi_1 \right|_{\varphi_1 = 0} \cdot \Delta \varphi_1$$

$$\Rightarrow \Delta \ddot{\varphi}_1 = -\frac{g}{l_1} \cdot \Delta \varphi_1$$

- Ruhelage $\varphi_1 = \pi$:

$$\Delta \ddot{\varphi}_1 = \left. -\frac{g}{l_1} \cdot \cos \varphi_1 \right|_{\varphi_1 = \pi} \cdot \Delta \varphi_1 = \frac{g}{l_1} \cdot \Delta \varphi_1$$

(daher häufige Näherung für Arbeitspunkte mit kleinen Winkelauslenkungen $\sin \varphi \approx \varphi$)

Aufgabe 9 (TR) ++ Schwungrad

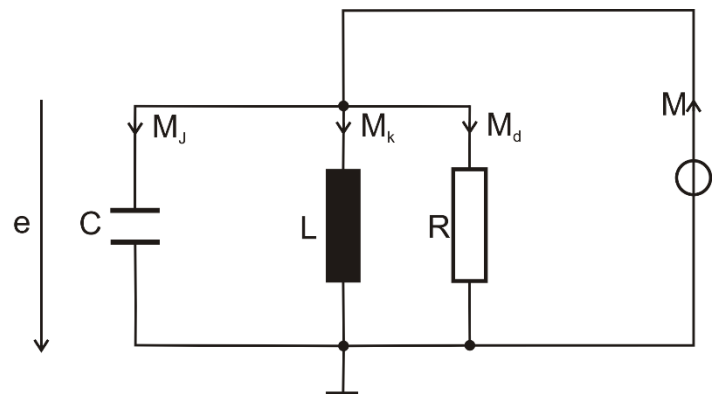
a)

$$e = \omega = \dot{\varphi}$$

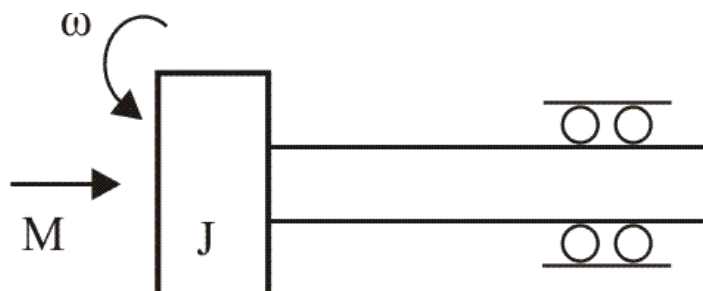
$$C = J$$

$$L = \frac{1}{k}$$

$$R = \frac{1}{d}$$



mechanisches ESB:



b)

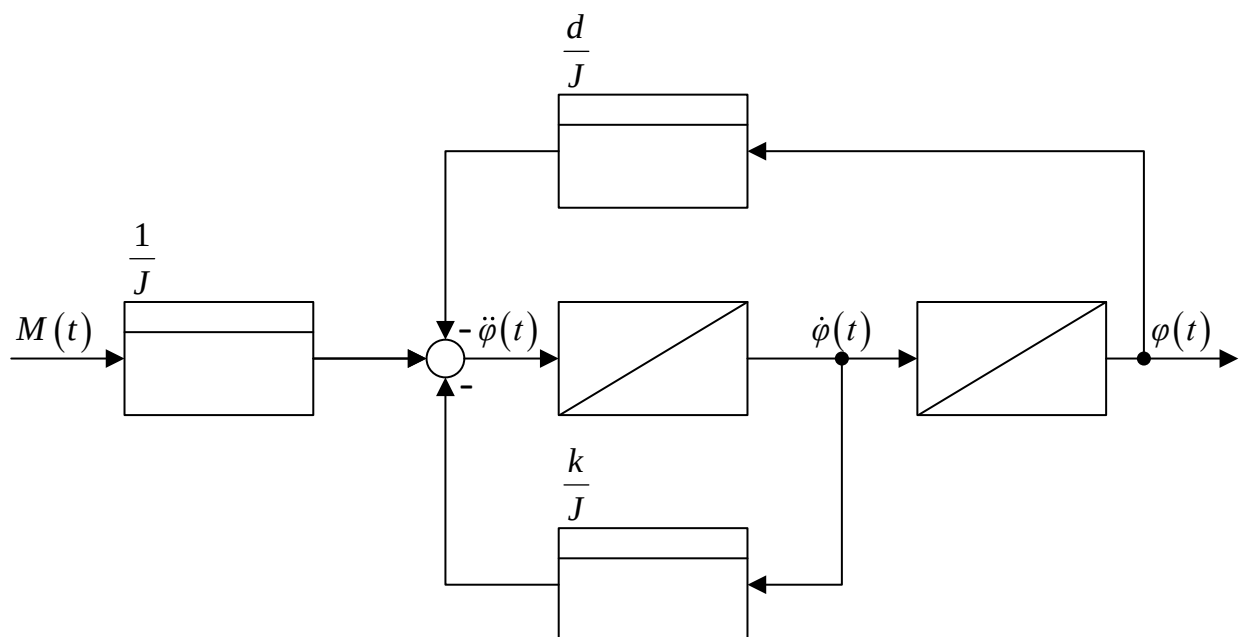
$$M_J = -M_d - M_k + M$$

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -d \cdot \dot{\varphi} - k \cdot \varphi + M$$

mit von außen wirkendem Drehmoment M

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{d}{J} \cdot \dot{\varphi} + \frac{k}{J} \cdot \varphi = \frac{1}{J} \cdot M$$

Strukturbild:



$$\ddot{\varphi} + \frac{d}{J} \cdot \dot{\varphi} + \frac{k}{J} \cdot \varphi = \frac{1}{J} \cdot M$$

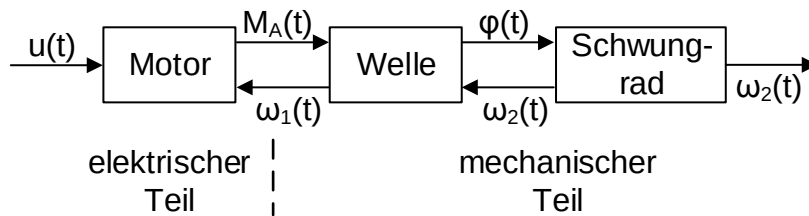
$$s^2 \cdot \varphi \cdot s + s \cdot \frac{d}{J} \cdot \varphi \cdot s + \frac{k}{J} \cdot \varphi \cdot s = \frac{1}{J} \cdot M \cdot s$$

$$G \cdot s = \frac{\varphi \cdot s}{M \cdot s} = \frac{\frac{1}{J}}{s^2 + s \cdot \frac{d}{J} + \frac{k}{J}} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{d}{k} \cdot s + \frac{J}{k} \cdot s^2}$$

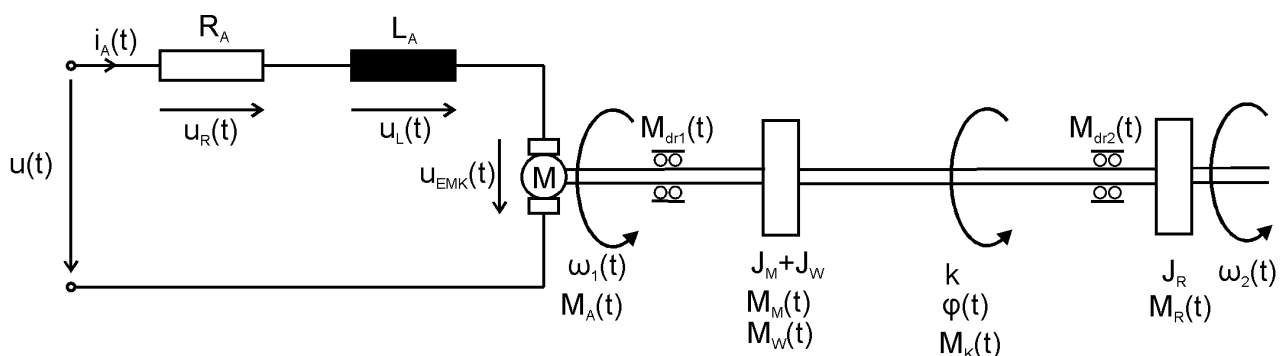
$\Rightarrow$ PT2-Glied

Aufgabe 10 (TR) +++ Gleichstrommotor mit Schwungrad

a)



b)


 L_A : Ankerinduktivität

 R_A : Ankerwiderstand

 $u(t)$: Klemmenspannung

 $i_A(t)$: Ankerstrom

 $u_{EMK}(t)$: induzierte Ankerspannung

 k_M, k_T : Motorkonstanten

 $M_{dr2}(t)$: Reibungsmoment am Schwungrad

 $M_M(t)$: Drehmoment des Ankers ohne Welle

 $M_W(t)$: Drehmoment der Welle

 $M_R(t)$: Drehmoment des Schwungrads

 $M_A(t)$: Antriebsmoment

 $M_K(t)$: Torsionsmoment an der Welle

 $M_{dr1}(t)$: Reibungsmoment am Anker

 $\omega_1(t)$: Winkelgeschwindigkeit am Anker

 $\dot{\omega}_1(t) = \ddot{\varphi}(t)$: Winkelbeschleunigung

 $\omega_2(t)$: Winkelgeschwindigkeit am Schwungrad

$\varphi(t)$:	Verdrillungswinkel
k :	Ersatzfederkonstante der Wellenelastizität
d_{r_1} :	Lagerreibung am Anker
d_{r_2} :	Lagerreibung an der Last
J_M :	Trägheitsmoment des Ankers ohne Welle
J_W :	Trägheitsmoment der Welle
J_R :	Trägheitsmoment des Schwungrads

c) Beschreibung der einzelnen Komponenten

Elektrischer Teil:

$$u_L(t) = L_A \cdot \dot{i}_A(t) \quad (3)$$

$$u_R(t) = R_A \cdot i_A(t) \quad (4)$$

Induzierte Spannung bei konstant angenommenen magn. Hauptfluss:

$$u_{EMK}(t) = c_{M1} \cdot \Psi_F \cdot \omega_1(t) = k_M \cdot \omega_1(t) \quad (5)$$

Drehmomentengleichung:

$$M_A(t) = c_{M2} \cdot \Psi_F \cdot i_A(t) = k_T \cdot i_A(t) \quad (6)$$

Reibmoment durch Lagerreibung:

$$M_{dr1}(t) = d_{r1} \cdot \omega_1(t) \quad (7)$$

Gegenmoment aufgrund der Massenträgheit:

$$M_M(t) = J_M \cdot \ddot{\varphi}_1(t) = J_M \cdot \dot{\omega}_1(t) \quad (8)$$

Mechanischer Teil:

Gegenmoment aufgrund der Massenträgheit der mit dem Motor gekoppelten Welle:

$$M_W(t) = J_W \cdot \dot{\omega}_1(t) \quad (9)$$

Torsionsmoment aufgrund der Wellenelastizität:

$$M_K(t) = k \cdot \varphi(t) \quad (10)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t) \quad (11)$$

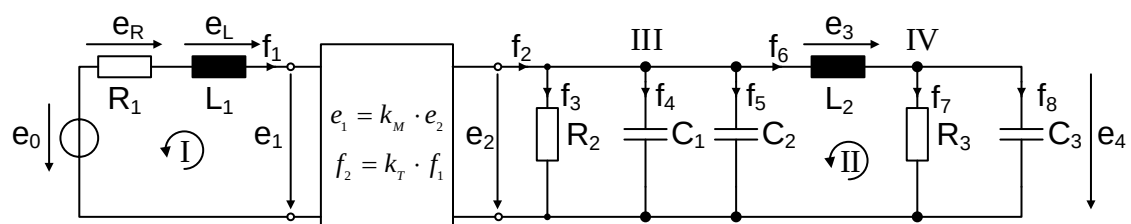
Gegenmoment aufgrund der Massenträgheit des Schwungrades:

$$M_R(t) = J_R \cdot \dot{\omega}_2(t) \quad (12)$$

Lagerreibung am zweiten Lager:

$$M_{dr2}(t) = d_{r2} \cdot \omega_2(t) \quad (13)$$

d)



$e_0 = u(t)$	$f_1 = i_A(t)$	$R_1 = R_A$
$e_1 = u_{EMK}(t)$	$f_2 = M_A(t)$	$R_2 = \frac{1}{d_{r1}}$
$e_2 = \omega_1(t)$	$f_3 = M_{dr1}(t)$	$R_3 = \frac{1}{d_{r2}}$
$e_3 = \dot{\varphi}(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t)$	$f_4 = M_M(t)$	$L_1 = L_A$
$e_4 = \omega_2(t)$	$f_5 = M_W(t)$	$L_2 = \frac{1}{k}$
$e_L = u_L(t)$	$f_6 = M_K(t)$	$C_1 = J_M$
$e_R = u_R(t)$	$f_7 = M_{dr2}(t)$	$C_2 = J_W$
	$f_8 = M_R(t)$	$C_3 = J_R$

e)

Beschreibung der Kopplungen aus ESB

Maschengleichung I:

$$e_0 - e_1 - e_L - e_R = 0$$

$$\Rightarrow u(t) - u_{EMK}(t) - u_L(t) - u_R(t) = 0 \quad (14)$$

Maschengleichung II:

$$e_2 - e_4 - e_3 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1(t) - \dot{\varphi}(t) - \omega_2(t) = 0 \quad (15)$$

Knotengleichung III:

$$f_2 - f_3 - f_4 - f_5 - f_6 = 0$$

$$\Rightarrow M_A(t) - M_{dr1}(t) - M_M(t) - M_W(t) - M_K(t) = 0 \quad (16)$$

Knotengleichung IV:

$$f_6 - f_7 - f_8 = 0$$

$$\Rightarrow M_K(t) - M_{dr2}(t) - M_R(t) = 0 \quad (17)$$

Aufstellen des Modells:

(3), (4) & (5) in (14) einsetzen:

$$u(t) - k_M \cdot \omega_1(t) - L_A \cdot \dot{i}_A(t) - R_A \cdot i_A(t) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{di_A(t)}{dt} = \frac{1}{L_A} [-R_A \cdot i_A - k_M \cdot \omega_1(t) + u(t)]}$$

(6), (7), (8), (9) & (10) in (16) einsetzen:

$$k_T \cdot i_A(t) - d_{r1} \cdot \omega_1(t) - J_M \cdot \dot{\omega}_1(t) - J_W \cdot \dot{\omega}_1(t) - k \cdot \varphi(t)$$

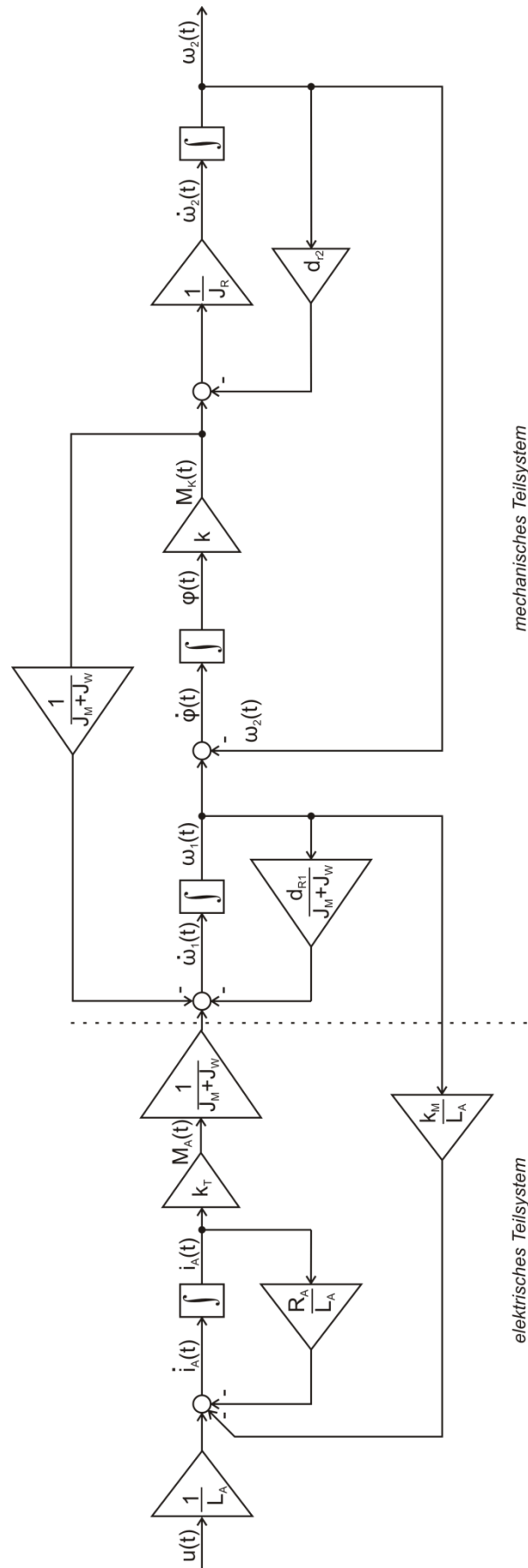
$$\Rightarrow \frac{d\omega_1(t)}{dt} = \frac{1}{J_M + J_W} \cdot [-d_{r1} \cdot \omega_1(t) - k \cdot \varphi(t) + k_T \cdot i_A(t)]$$

(10), (12) & (13) in (17) einsetzen:

$$k \cdot \varphi(t) - d_{r2} \cdot \omega_2(t) - J_R \cdot \dot{\omega}_2(t) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d\omega_2(t)}{dt} = \frac{1}{J_R} \cdot [-d_{r2} \cdot \omega_2(t) + k \cdot \varphi(t)]$$

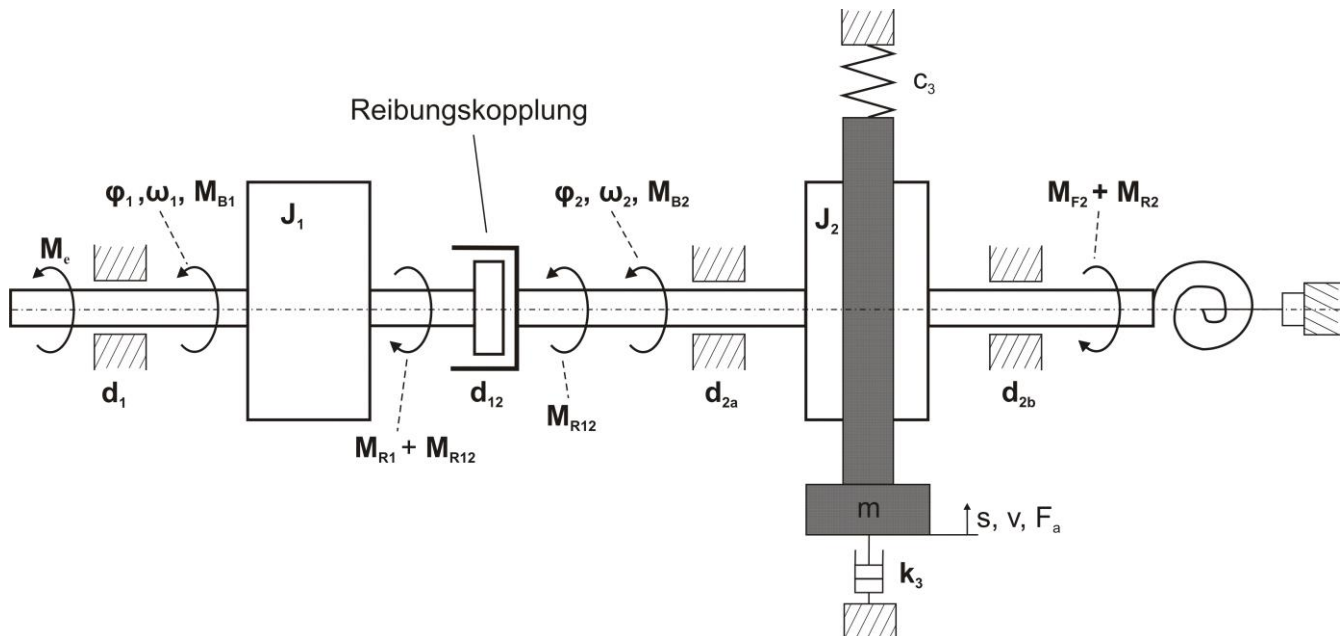
Aus (15) folgt:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_1(t) - \omega_2(t)$$



Aufgabe 11 (TR) ++++ Feder-Masse-System mit Reibungskopplung und Ritzel-Zahnstange-Kopplung

a)



$$M_{R1} = d_1 \cdot \omega_1 \quad (\text{Reibung an 1. Lager})$$

$$M_{B1} = J_1 \cdot \dot{\omega}_1 \quad (\text{Trägheit der 1. Welle})$$

$$M_{R12} = d_{12} \cdot (\omega_1 - \omega_2) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Reibung aufgrund der Relative-} \\ \text{geschwindigkeit zwischen den Wellen} \end{array} \right)$$

$$M_{R2} = d_{2a} \cdot \omega_2 + d_{2b} \cdot \omega_2 = (d_{2a} + d_{2b}) \cdot \omega_2 = d_2 \cdot \omega_2 \quad (\text{Lagerreibung der 2. Welle})$$

$$M_{B2} = J_2 \cdot \dot{\omega}_2 \quad (\text{Trägheit der 2. Welle})$$

$$M_{F2} = k_{2NL} \cdot \varphi_2^3 \quad (\text{Feder am Wellenende})$$

$$M_{F23} = -r \cdot F_{F23} = -r \cdot k \cdot (s_{Um} - s) \quad (\text{Zahnnachgiebigkeit})$$

$$= r \cdot k_{23} \cdot (s_{Um} - s)$$

$$F_R = d_3 \cdot v \quad (\text{Dämpfer an Zahnstange})$$

$$F_F = k_3 \cdot s - F_g \quad (\text{Feder an Zahnstange})$$

$$M_{R23} = -r \cdot F_{R23} = -r \cdot d_{23} \cdot (-\dot{s}_{Um} - \dot{s}) \quad (\text{Zahnreibung})$$

$$= r \cdot d_{23} \cdot (\dot{s}_{Um} - \dot{s})$$

$$F_B = m \cdot \ddot{s}$$

$$v_{Um} = \omega_2 \cdot r \quad (\text{Wandler})$$

$$s_{Um} = \varphi_2 \cdot r$$

Verallgemeinerte Größen:

$$M_e = f_A$$

$$M_{R1} = d_1 \cdot \omega_1 \Rightarrow f_B = d_1 \cdot e_A = \frac{1}{R_B} \cdot e_A$$

$$M_{B1} = J_1 \cdot \dot{\omega}_1 \Rightarrow f_C = J_1 \cdot \dot{e}_A = C_C \cdot \dot{e}_A$$

$$M_{R12} = d_{12} \cdot (\omega_1 - \omega_2) \Rightarrow f_D = d_{12} \cdot (e_A - e_B) = \frac{1}{R_D} \cdot (e_A - e_B)$$

$$M_{R2} = (d_{2a} + d_{2b}) \cdot \omega_2 \Rightarrow f_E = (d_{2a} + d_{2b}) \cdot e_B = \frac{1}{R_E} \cdot e_B$$

$$M_{B2} = J_2 \cdot \dot{\omega}_2 \Rightarrow f_F = J_2 \cdot \dot{e}_B = C_F \cdot \dot{e}_B$$

$$M_{F2} = k_{2NL} \cdot \phi_2^3 \Rightarrow f_G = k_{2NL} \cdot q_B^3 = \frac{1}{L_G} \cdot q_B^3$$

Translatorischer Teil:

$$F_{F23} = k_{23} \cdot (s_{Um} - s) \Rightarrow f_H = k_{23} \cdot (q_C - q_D) = \frac{1}{L_H} \cdot (q_C - q_D)$$

$$F_R = d_3 \cdot v \Rightarrow f_I = d_3 \cdot e_C = \frac{1}{R_I} \cdot e_C$$

$$F_F = k_3 \cdot s - F_g \Rightarrow f_J = k_3 \cdot q_C - f_g = \frac{1}{L_J} \cdot q_C - \underbrace{f_g}_{\substack{\text{Muss nicht eingezeichnet} \\ \text{werden, da sie der Ge-} \\ \text{wichtskraft entgegenwirkt}}}$$

$$F_{R23} = d_{23} \cdot (\dot{s}_{Um} - \dot{s}) \Rightarrow f_K = d_{23} \cdot (e_C - e_D) = \frac{1}{R_K} \cdot (e_C - e_D)$$

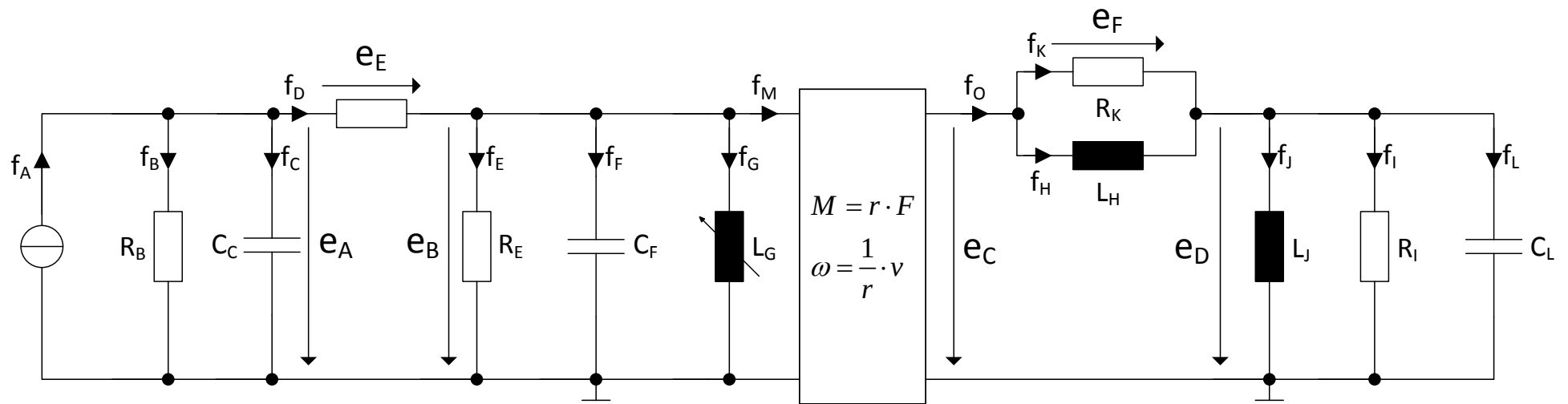
$$m \cdot \ddot{s} = F_B \Rightarrow f_L = m \cdot \dot{e}_C = C_L \cdot \dot{e}_C$$

$$f_M = M$$

$$f_O = F$$

b) Transformator von rotativer in translatorische Bewegung

c)



Knotenregel:

$$f_A = f_B + f_C + f_D \quad (I)$$

$$f_D = f_E + f_F + f_G + f_M \quad (II)$$

$$f_O = f_H + f_K \quad (III)$$

$$f_O = f_J + f_I + f_L \quad (IV)$$

Wandler:

$$M_M = r \cdot F$$

$$v_{Um} = \omega_2 \cdot r$$

Einsetzen der Gleichungen aus a)

$$(I) f_A = f_B + f_C + f_D$$

$$\Rightarrow M_e = M_{R1} + M_{B1} + M_{R12} = d_1 \cdot \omega_1 + J_1 \cdot \dot{\omega}_1 + d_{12} \cdot (\omega_1 - \omega_2)$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_1 = \frac{1}{J_1} \cdot [-d_1 \cdot \omega_1 - d_{12} \cdot (\omega_1 - \omega_2) + M_e]$$

$$(II) f_D = f_E + f_F + f_G + f_M$$

$$M_{R12} = M_{R2} + M_{B2} + M_{F2} + M_M$$

$$d_{12} \cdot (\omega_1 - \omega_2) = (d_{2a} + d_{2b}) \cdot \omega_2 + J_2 \cdot \dot{\omega}_2 + k_{2NL} \cdot \varphi_2^3 + M_M$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_2 = \frac{1}{J_2} \cdot [-(d_{2a} + d_{2b}) \cdot \omega_2 - k_{2NL} \cdot \varphi_2^3 - M_M + d_{12} \cdot (\omega_1 - \omega_2)]$$

$$(III) f_O = f_H + f_K$$

$$F = F_{F23} + F_{R23} = k_{23} \cdot (s_{Um} - s) + d_{23} \cdot (\dot{s}_{Um} - \dot{s})$$

$$(IV) f_O = f_J + f_I + f_L = F_F + F_R + F_{dyn}$$

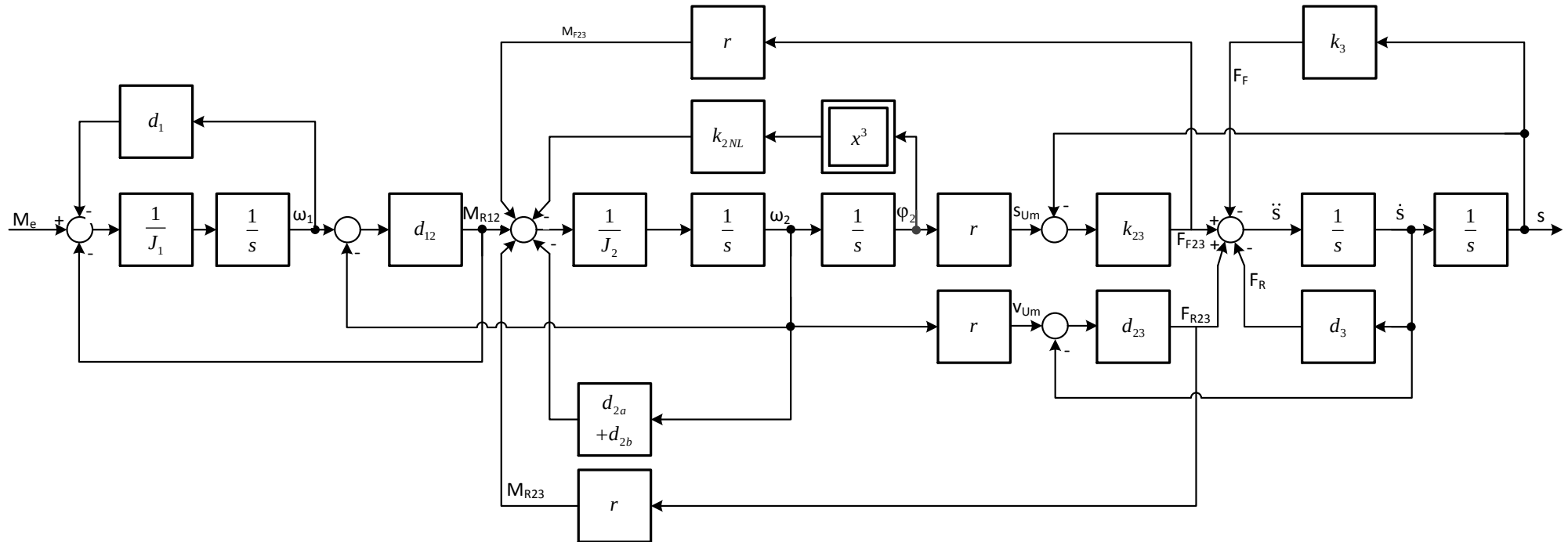
$$F = k_3 \cdot s + d_3 \cdot \dot{s} + m \cdot \ddot{s}$$

$$(III) = (IV)$$

$$k_{23} \cdot (s_{Um} - s) + d_{23} \cdot (\dot{s}_{Um} - \dot{s}) = k_3 \cdot s + d_3 \cdot \dot{s} + m \cdot \ddot{s}$$

$$\ddot{s} = \frac{1}{m} \cdot [k_{23} \cdot (s_{Um} - s) + d_{23} \cdot (\dot{s}_{Um} - \dot{s}) - k_3 \cdot s - d_3 \cdot \dot{s}]$$

d)



Aufgabe 13 (TR) +++ Abgasschalldämpfer

